



**UM FIO, UMA MASSA E UM COMPUTADOR: Do Experimento do Pêndulo
Simples ao Aprendizado de Máquina****A STRING, A MASS AND A COMPUTER: From Simple Pendulum Experiment to
the Machine Learning**SANTOS, Emanuel Pinheiro¹**RESUMO**

O pêndulo simples consiste basicamente de uma massa sustentada por um fio num ponto de apoio. Este objeto permitiu, desde a era da antiguidade, observações de fenômenos temporais e oscilatórios. No início do século XVII, Galileu Galilei observou que para pequenas oscilações, o pêndulo apresenta movimento isócrono, isto é, ele oscila em períodos iguais. O pêndulo é objeto de estudo para pesquisadores e professores desde então, pois não apenas é uma ferramenta de baixo custo e fácil de montar, como permite estudar muitos conceitos físicos como oscilações, período, frequência, aceleração gravitacional. Nos séculos passados, experimentos simples da física serviram de base para o cálculo de constantes universais ou fazer demonstrações matemáticas. No caso do experimento do pêndulo simples é possível calcular a constante da aceleração gravitacional local, muito atribuída em livros e artigos como $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, além de ser possível a demonstração da equação de movimento harmônico simples. No entanto, nos últimos anos a tecnologia tem dado um salto e algoritmos de inteligência artificial, tal como de aprendizado de máquina – *machine learning* – tem se mostrado promissor em diversos campos das ciências. Na física computacional, usar aprendizado de máquina para analisar teorias e experimentos tem se mostrado uma ferramenta excepcional. Com isso, neste trabalho iremos usar um algoritmo simples de aprendizado de máquina para analisar resultados do experimento do pêndulo simples. O objetivo deste estudo é elucidar a importância de experimentos simples no ensino da física, bem como motivar o estudo experimental de ferramentas computacionais reconhecidas.

Palavras-chave: Pêndulo Simples. Aprendizado de Máquina. Ensino de Física.

ABSTRACT

The simple pendulum basically consists of a mass supported by a string fixed at a pivot point. This object has allowed, since antiquity, observations of temporal and oscillatory phenomena. At the beginning of the 17th century, Galileo Galilei observed that for small oscillations, the pendulum presents isochronous movement, that is, it oscillates in equal periods. The pendulum has been the object of study for researchers and professors since then, as in addition to being a low-cost tool that is easy to assemble,

¹ Licenciado em Física pela Universidade Federal de Alagoas. Mestre em Física pela Universidade Federal de Pernambuco. Especialista em Ensino de Física pela FaSouza. Contato: emanuelsantos@outlook.com

it also allows the study of many physical concepts such as oscillations, period, frequency, gravitational acceleration. In past centuries, simple physics experiments served as a basis for calculating universal constants or doing mathematical demonstrations. In the case of the simple pendulum experiment, it is possible to calculate the constant of local gravitational acceleration, often attributed in books and articles as $g=9.8 \text{ m/s}^2$, in addition to being possible to demonstrate the equation of simple harmonic motion. However, in recent years technology has taken a leap and artificial intelligence algorithms, such as machine learning, have shown promise in various fields of science. In computational physics, using machine learning to analyze theories and experiments has proven to be an exceptional tool. Therefore, in this work we will use a simple machine learning algorithm to analyze results of the simple pendulum experiment. The objective of this study is to elucidate the importance of simple experiments in physics teaching, as well as to motivate the experimental study of recognized computational tools.

Keywords: Simple Pendulum. Machine Learning. Physics Teaching.

1. INTRODUÇÃO

Na física, pêndulo é qualquer objeto que consista numa massa suspensa em um fio ou haste. É muito simples fazer um pêndulo, basta, por exemplo, pegar uma pilha e amarrar em uma linha de costura. Prendendo a extremidade da linha em um ponto de apoio, a pilha então ficará suspensa. O interessante desse objeto é que, embora seja muito simples, quando a pilha é posta num ângulo diferente de zero em relação a vertical, quando solta começa a oscilar em períodos iguais – claro que a dissipação de energia diminuirá o movimento até parar. Isso é o princípio dos antigos relógios de pêndulo, muito utilizados nos séculos passados.

A história do pêndulo e suas primeiras aplicações é publicada, atualmente, em diversos livros e revistas de divulgação científica. Neste trabalho iremos mostrar que o experimento do pêndulo simples, além de ótima ferramenta para o ensino de física e instigação do conhecimento científico, pode ser usado para o contexto interdisciplinar com a computação. Para isso usamos linguagem de programação em python para desenvolver um algoritmo simples de aprendizado de máquina para analisarmos os resultados do experimento prático do pêndulo simples, que pode ser feito em casa, na escola, no laboratório ou em qualquer espaço que tenha os objetos necessários.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que com uma massa, um fio (ou uma haste) e um computador, é possível fazer uma viagem no fantástico mundo da física e da computação ao mesmo tempo.

2. CENÁRIO

O físico e astrônomo italiano Galileu Galilei (1564-1642) foi pioneiro no estudo desse simples experimento. Galileu observou o movimento oscilatório do pêndulo e notou que, mesmo mudando a massa usada no pêndulo, isso não altera o intervalo de tempo da oscilação. Após os estudos de Galileu, em 1644, o padre francês Marin Mersenne (1588-1648) observou que independentemente do ângulo inicial (com a vertical) do pêndulo, o período de oscilação é o mesmo. Embora tais observações experimentais feitas por Galileu e Mersenne sejam verídicas, somente em 1659 que o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) demonstrou matematicamente que o período do pêndulo de fato não depende do ângulo ou da massa, mas sim do comprimento da haste (ou fio).

O pêndulo simples, por seu baixo custo e sua versatilidade, é amplamente usado para o ensino de física (ARNOLD et al., 2011; LUCHESE; MERGEN; ANDRIGHETTO, 2020; MERGEN, 2019). Diversos livros abordam didaticamente o conteúdo, seja para o ensino básico (FERRARO; SOARES; FOGO, 2019; HEWITT, 2015) ou para o ensino superior (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; NUSSENZVEIG, 2018). De acordo com o descrito na introdução, este é um experimento bem antigo e possui diversas aplicações e curiosidades (BUYSE, 2018; DE JESUS; BARROS, 2014; LAGE, 2018; TRETIAKOV, 1999).

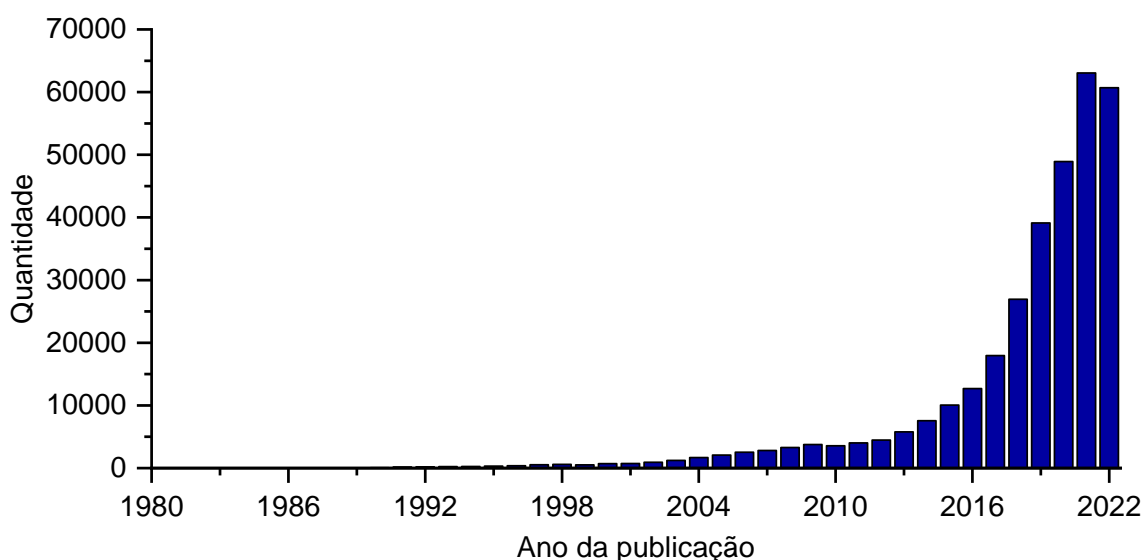
Considerando que a importância do pêndulo está bem consolidada na comunidade científica, dar-se-á nossa principal motivação para estudá-lo diante da perspectiva de ensino e aprendizagem. Para este trabalho, o principal objetivo é levantar uma abordagem interdisciplinar entre o conteúdo do pêndulo simples e um conteúdo da computação chamado Aprendizado de Máquina – *Machine Learning*, no inglês.

O aprendizado de máquina é um ramo da inteligência artificial em que os algoritmos são desenvolvidos para serem treinados com dados, e com isso são capazes de registrar padrões e configurações tal que a máquina consiga “aprender”

com esses dados, de modo a conseguir realizar previsões acerca de dados futuros. Uma boa referência para se aprofundar no assunto é (EL NAQA; MURPHY, 2015).

Desde a metade do século XX, quando o conceito de *Machine Learning* surgiu, a comunidade científica vem notando sua eficiência. Desse modo, isso resulta num crescente interesse e a quantidade de publicações envolvendo o tema teve um aumento notável (figura 1).

Figura 1 – Busca na *Web Of Science* pelo tópico: *Machine Learning*.



Fonte: Autor, 2023.

Na figura 1 é mostrada a quantidade de trabalhos publicados em função do ano para o tópico “*Machine Learning*” (“Aprendizado de Máquina”), cujo a busca foi feita na base de dados da *Web Of Science*. O crescimento exponencial de publicações envolvendo esse tema se justifica pela capacidade da máquina analisar, automatizar e consolidar dados e resultados como se tivesse sido feito por um humano, porém muito mais rápido.

É importante destacar que, na comunidade não científica, existe uma disseminação de que o aprendizado de máquina e/ou a inteligência artificial é uma ciência para criar robôs que viriam a dominar humanos. Consequentemente, isso gera a popularização de mitos por parte da sociedade (MACKENZIE, 2022), que não

contribui em nada para o saudável avanço tecnológico e científico. Portanto, inserir o conceito de inteligência artificial e aprendizado de máquina tem sido importante em diversos trabalhos, tal que com isso o termo se torne cada vez mais popular; como uma calculadora, que é o exemplo mais clássico de uma inteligência artificial, mas que hoje é difícil viver sem contato com uma.

Em trabalhos anteriores, algoritmos de aprendizado de máquina já tem sido usado na física e no ensino de física (MASCARENHAS et al., 2020; SCHLEDER; FAZZIO, 2021). Recentemente autores mostraram como usar o *machine learning* para estudar o problema clássico do rolamento no plano inclinado como proposta para a introdução do aprendizado de máquina em cursos de física (FERREIRA et al., 2022). Motivado nessas publicações anteriores, neste presente trabalho, nós iremos apresentar o aprendizado de máquina para o problema do pêndulo simples, conteúdo que faz parte dos cursos de física do ensino superior (bacharelado e licenciatura) e da física básica do ensino médio.

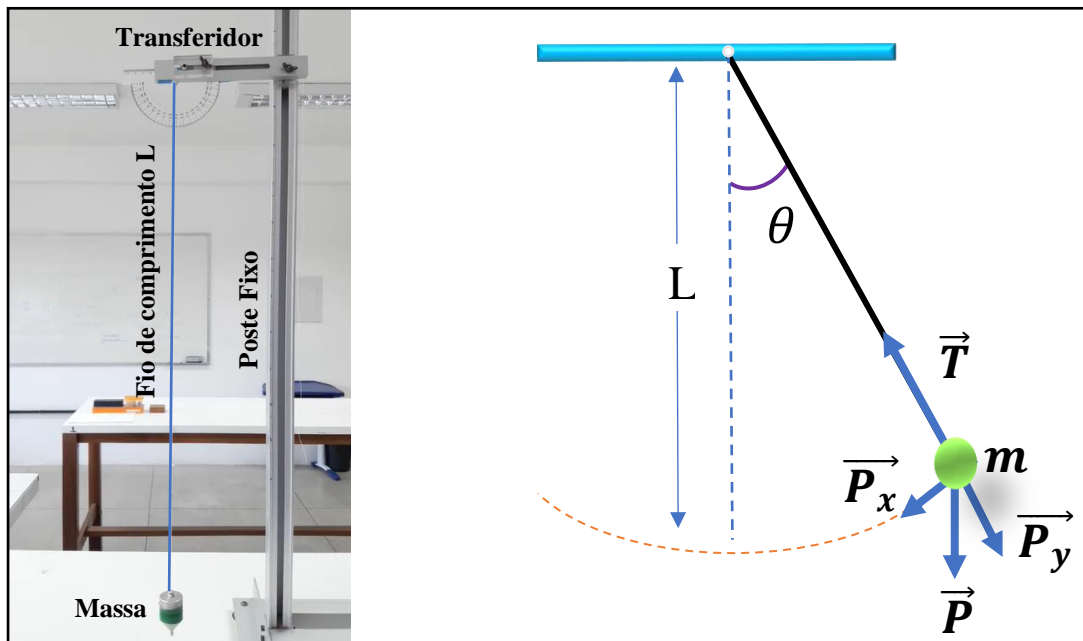
3. O EXPERIMENTO E A MATEMÁTICA DO PÊNDULO SIMPLES

Para realizar o experimento do pêndulo simples são necessários os seguintes materiais:

- Uma massa
- Um fio
- Um poste fixo
- Transferidor
- Cronômetro

A massa pode ser qualquer objeto com magnitude muito maior que a massa do fio que a suspende. Obviamente não poderíamos usar uma massa muito intensa para não danificar o fio, nem o experimento. No nosso caso, usamos uma massa de aproximadamente 500g e um fio de aproximadamente 8g. O fio é preso no poste fixo, de modo a permitir que o pêndulo oscile sem colidir com qualquer outro objeto. O arranjo experimental é mostrado na figura 2.

Figura 2 – Experimento do Pêndulo Simples.



Fonte: Autor, 2023.

Quando o pêndulo está em sua posição de equilíbrio (centro), a força de tensão do fio (\vec{T}) é igualada à força peso (\vec{P}), uma vez que estão em direções opostas e não há movimento do pêndulo na direção dessas forças. No entanto, na medida em que o pêndulo começa seu movimento oscilatório, surgirá um ângulo (θ) em relação a vertical de modo que a força peso pode ser decomposta, uma parte que continua equilibrando com a força de tensão (\vec{P}_y) e a outra que gera a força de restauração devolvendo a massa para o centro (\vec{P}_x). Nota-se que, usando a álgebra de decomposição de vetores, temos a força $P_x = mg \sin \theta$, que é a força responsável pelo movimento, em que m é a massa em quilogramas e g é o valor da aceleração da gravidade local. De acordo com a segunda lei de Newton, estabelece-se

$$m\ddot{x} = -P_x, \quad (1)$$

em que \ddot{x} é a aceleração tangencial devido a força P_x , que é a componente peso na direção x – ver figura 2 – e o sinal de menos caracteriza a restauração ao ponto de

equilíbrio. Explicitando a força P_x em (1) e lembrando da relação para aceleração tangencial, $\ddot{x} = L\ddot{\theta}$, em que $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular, temos:

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \quad (2)$$

$$mL\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0. \quad (3)$$

Para ângulos pequenos, sabemos que $\sin\theta \cong \theta$, portanto

$$mL\ddot{\theta} + mg\theta = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \quad (6)$$

em que definimos a frequência angular de pequenas oscilações como:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (7)$$

Conhecemos ainda que a relação entre frequência angular e o período é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8)$$

logo, usando (7) e (8),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (9)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L. \quad (10)$$

Observa-se que o período (equação 9) é, portanto, independente da massa e do ângulo. Desse modo, no experimento nós variamos o comprimento do pêndulo e registramos o período. De posse dessas duas grandezas, é possível estimar o valor de g usando a equação (9) ou (10). Para esse cálculo, faremos através do ajuste de curva usando algoritmos em python.

4.0 ALGORITMO COMPUTACIONAL

Podemos usar a equação (9) ou (10) para os resultados experimentais. De acordo com a equação (10), obtemos uma relação linear entre o quadrado do período e o comprimento do fio.

De posse dos resultados experimentais (tabela 1), fizemos o tratamento computacional com ajuste linear através de 2 algoritmos diferentes, em que o primeiro usa uma tradicional biblioteca do python chamada `curve_fit` (“`scipy.optimize.curve_fit` — SciPy v0.18.1 Reference Guide”, [s.d.]), enquanto o segundo usa uma biblioteca de aprendizado de máquina (“`sklearn.linear_model.LinearRegression`”, [s.d.]).

O objetivo deste trabalho não é discutir o mérito de cada algoritmo, mas mostrar que usando esses algoritmos é possível analisar resultados experimentais e levantar a discussão em sala de aula ou laboratório de ensino sobre a eficiência da computação dentro da física e conseqüentemente, para o mundo contemporâneo.

Abaixo estão disponibilizados os algoritmos feito pelo autor para analisar os resultados experimentais.

Quadro 1 – Código 1 para análise dos resultados.

Algoritmo 1 – Usando o `scipy.optimize.curve_fit`

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit
import numpy as np
import scipy
from scipy import stats

file = np.loadtxt("dados experimentais - pendulo.dat")

eixoX = file[:,0]
```

```
eixoY = file[:,2] # 1 – usa T, 2 – usa T2

g = []
for i in range(len(eixoX)):
    g.append(((4*np.pi*np.pi)/eixoY[i])*eixoX[i])

gmed = np.mean(g)

print(f'o valor médio de g é: {gmed}')

def func(x,g,k):
    if n==1:
        return 2*np.pi*np.sqrt(x/g) + k
    if n==2:
        return g*x + k

if n==1:
    chute = 9.807, 0
if n==2:
    chute = 4.028, 0

ajuste = scipy.stats.linregress(eixoX,eixoY)
gmed2 = 4*np.pi*np.pi/ajuste[0]
print(f'o valor médio de g fitado é: {float(gmed2)}')

plt.scatter(eixoX,eixoY, color='green', label='Experimento')
plt.plot(eixoX, ajuste[0]*eixoX+ajuste[1])
plt.xlabel('Comprimento (m)', size=12)
plt.ylabel('Período ao Quadrado (s)', size=12)

plt.legend()
```

Fonte: Autor.

Quadro 2 – Código 2 para análise dos resultados.

Algoritmo 2 – Usando o *sklearn.linear_model.LinearRegression*

```
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import numpy as np
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from sklearn.model_selection import train_test_split

dataset = pd.read_csv('dados experimentais - pendulo.dat', delimiter='\t',
header=None)
```

```
x = dataset.iloc[:,0].values.reshape(-1,1)
y = dataset.iloc[:,2].values.reshape(-1,1)

x_train, x_test, y_train, y_test = train_test_split(x,y,
                                                    test_size=0.3,
                                                    random_state=0)

LinReg = LinearRegression().fit(x_train, y_train)

#coeficiente linear =>
a0 = LinReg.intercept_
#coeficiente angular =>
a1 = LinReg.coef_

gmed3 = 4*np.pi*np.pi/LinReg.coef_
print(f'o valor médio de g fitado pelo ML é: {float(gmed3)}')

xt = np.linspace(min(x),max(x),50)

plt.scatter(x_train, y_train, color='green', label='Dado de Treino')
plt.plot(xt, a0 + a1*xt,'--r', label='Ajuste pelo AM')
plt.scatter(x_test, y_test, color='blue', label='Dado de Teste')
plt.xlabel('Comprimento (m)', size=12)
plt.ylabel('Período ao Quadrado (s)', size=12)
plt.legend()
plt.show()
```

Fonte: Autor.

Para ambos os casos, os dados usados ('dados experimentais – pendulo.dat') são os que disponível estão na tabela 1.

5.RESULTADOS E DISCUSSÕES

No âmbito do ensino e aprendizagem, o uso do pêndulo simples já tem se mostrado uma ferramenta viabilizadora da aprendizagem significativa e objeto de motivações práticas do ensino de física (MARTINS, 2016; SILVA, 2018). Com isso, vamos acrescentar a tais estudos uma abordagem interdisciplinar, ou seja, vamos

encarar o experimento do pêndulo simples a partir dos códigos em python descritos na seção 3.

O experimento foi realizado conforme o arranjo experimental da figura 2. Variamos o comprimento do fio desde 10 centímetros até 80 centímetros. Para cada comprimento foi monitorado, através de um cronometro, o período do pêndulo. As observações estão dispostas na tabela 1 e com elas plotamos o gráfico do período quadrado em função do comprimento do fio – figuras 3 e 4.

Tabela 1 – Código 2 para análise dos resultados.

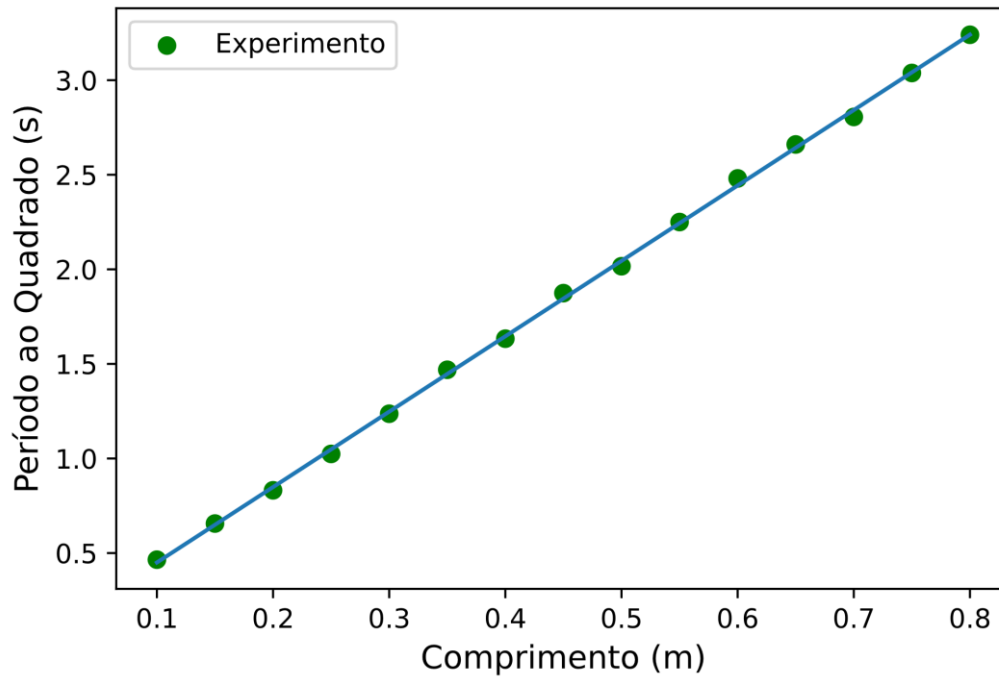
Comprimento do fio (m)	Período (s)	Período Quadrado (s)
0.8	1.8	1.8
0.75	1.743	1.743
0.7	1.675	1.675
0.65	1.631	1.631
0.6	1.575	1.575
0.55	1.5	1.5
0.5	1.42	1.42
0.45	1.369	1.369
0.4	1.278	1.278
0.35	1.212	1.212
0.3	1.112	1.112
0.25	1.012	1.012
0.2	0.912	0.912
0.15	0.81	0.81
0.1	0.682	0.682

Fonte: Autor.

Como mostramos nas equações (9) e (10), a massa ou o ângulo do pêndulo não influencia no seu período, portanto esse registro não foi apreciado na tabela 1. Para um leitor mais curioso, recomenda-se o vídeo da seguinte referencia (“Tema 01 - O Oscilador Harmônico Simples | Experimentos - Pêndulos simples”, 2016, p. 01).

Observando a equação (10), sabemos que o regime entre o quadrado do período e o comprimento do fio é linear, desse modo podemos apreciar a figura 3.

Figura 3 – Resultado experimental e ajuste linear.



Fonte: Autor, 2023.

Na figura 3, os pontos verdes são pontos experimentais, enquanto a reta sólida azul é o ajuste numérico realizado usando o primeiro código – disponibilizado no quadro 1. Com os coeficientes obtidos através da reta ajustada, sua equação é:

$$T^2 = (3.986)L + 0.052. \quad (11)$$

Portanto, comparando as equações (11) e (10), podemos negligenciar coeficiente linear em (11) – que está relacionado ao erro experimental – e igualar os coeficientes angulares, logo:

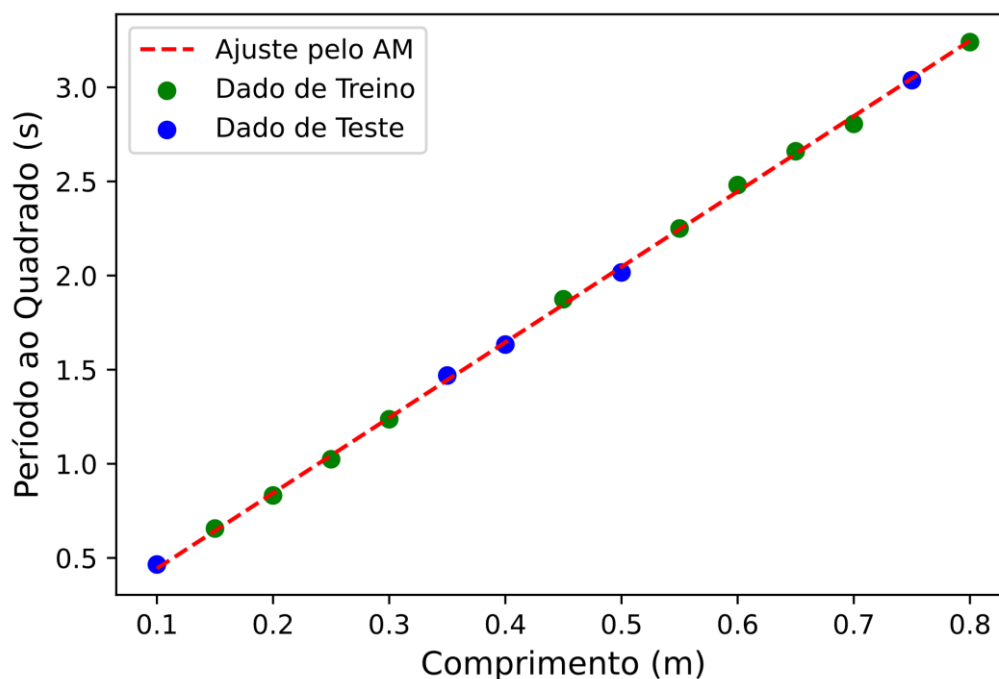
$$\frac{4\pi^2}{g} = 3.986, \quad (12)$$

$$g = 9.9038 \text{ m/s}^2. \quad (13)$$

Assim, mostra-se que o valor da aceleração gravitacional local é aproximadamente $g = 9.9038 \text{ m/s}^2$. Esse valor está de acordo com o que se espera nas localizações da superfície terrestre ao nível do mar, $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ (JÚNIOR; FERRARO; SOARES, 2009).

Para comparar com o resultado da figura 3, usamos agora o algoritmo dado no quadro 2 para os dados da figura 4. Para o treinamento do *machine learning*, usamos os pontos verdes da figura 4 (dados de treino) e testamos com os pontos azuis (dados de teste). O conjunto dos pontos verde e azuis são os mesmos dados experimentais usados na figura 3. A reta vermelha tracejada é o ajuste com o algoritmo do aprendizado de máquina.

Figura 4 – Resultado experimental e ajuste linear.



Fonte: Autor, 2023.

Os coeficientes obtidos através desse segundo programa geram a seguinte equação da reta de ajuste:

$$T^2 = (4.006)L + 0.043. \quad (14)$$

Vale notar a ligeira diferença com a equação (11), possuindo um erro experimental menor. Comparando (14) e (10):

$$\frac{4\pi^2}{g} = 4.006, \quad (15)$$

$$g = 9.8561 \text{ m/s}^2. \quad (16)$$

Observa-se que o valor da aceleração gravitacional aqui é mais próximo do esperado pela literatura do que o resultado obtido em (13). Desse modo, usamos o experimento já tão conhecido na física para encarar um assunto atual da computação, isto é, pendulo simples mais aprendizado de máquina.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo, mostramos que o uso de algoritmo básico de aprendizado de máquina é uma boa ferramenta para estudar o pêndulo simples. Destaca-se que, os códigos aqui desenvolvidos, não requerem um conhecimento grande de computação. Apenas possuindo conhecimentos básicos de programação, é possível compreender perfeitamente os códigos desenvolvidos e disponibilizados nesse trabalho.

Como perspectiva de um leitor mais curioso, pode ainda ser feito a variação do ângulo do pêndulo mantendo o comprimento fixo. Mais ainda, o estudante pode também testar massas diferentes mantendo as outras constantes iguais. O objetivo

seria então verificar que, de fato, o período do pêndulo não depende da massa ou do ângulo.

O experimento aqui discutido é de baixo custo, portanto a divulgação e apreciação dos conhecimentos levantados pode ser feito em diversos ambientes físicos e também em laboratórios virtuais de ensino de física. O importante é notar que esse experimento e a técnica do aprendizado de máquina podem ser ferramentas de destaque quanto ao ensino de ciências, de física ou de outras áreas similares. Então, com uma massa, um fio e um computador, há muito o que aprender e ensinar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARNOLD, F. J. et al. Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, p. 4311–4311, dez. 2011.

BUYSE, F. A. A. Galileo Galilei, Holland and the pendulum clock. **O que nos faz pensar**, v. 26, n. 41, 21 fev. 2018.

DE JESUS, V. L. B.; BARROS, M. A. J. As múltiplas faces da dança dos pêndulos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, 2014.

EL NAQA, I.; MURPHY, M. J. What Is Machine Learning? Em: EL NAQA, I.; LI, R.; MURPHY, M. J. (Eds.). **Machine Learning in Radiation Oncology: Theory and Applications**. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 3–11.

FERRARO, N. G.; SOARES, P. DE T.; FOGO, R. **Física básica - Volume único**. 4ª edição ed. [s.l.] Saraiva Didáticos, 2019.

FERREIRA, H. et al. Introduzindo aprendizado de máquina em cursos de física: o caso do rolamento no plano inclinado. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 44, 5 dez. 2022.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física - Gravitação, Ondas e Termodinâmica - Volume 2**. 10ª edição ed. [s.l.] LTC, 2016.

HEWITT, P. **Física Conceitual-12**. [s.l.] Bookman Editora, 2015.

JÚNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. DE T. **Física. Os Fundamentos da Física - Volume 1. Coleção Moderna Plus**. 10ª edição ed. [s.l.] Moderna, 2009.

LAGE, E. Pêndulo de Foucault. **Revista de Ciência Elementar**, v. 6, n. 3, 2018.

LUCHESE, T. DE C.; MERGEN, A.; ANDRIGHETTO, R. O pêndulo simples como mediador de conceitos e métodos no ensino de Física/ The simple pendulum mediating concepts and methods in teaching of Physics. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 1, p. 4891–4908, 30 jan. 2020.

MACKENZIE. **4 mitos ou verdades sobre inteligência artificial**. Disponível em: <<https://blog.mackenzie.br/vestibular/atualidades/4-mitos-ou-verdades-sobre-inteligencia-artificial/>>. Acesso em: 19 jan. 2023.

MARTINS, A. DA C. **Aceleração gravitacional: uma proposta de abordagem com objetivo de viabilizar sua aprendizagem significativa**. Master's Thesis—[s.l.] Universidade Estadual de Maringá, 2016.

MASCARENHAS, T. A. T. et al. Aplicação de algoritmos de aprendizado de máquina na classificação de Conhecimentos Especializados de Professores de Física. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 11, p. e86191110584–e86191110584, 2020.

MERGEN, A. Aproximações no ensino de física: o estudo do pêndulo simples. 3 jul. 2019.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Fluidos, oscilações e ondas, calor**. [s.l.] Editora Blucher, 2018.

SCHLEDER, G. R.; FAZZIO, A. Machine Learning na Física, Química, e Ciência de Materiais: Descoberta e Design de Materiais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 43, 5 mar. 2021.

scipy.optimize.curve_fit — SciPy v0.18.1 Reference Guide. Disponível em: <http://wwwens.aero.jussieu.fr/lefrere/master/SPE/docs-python/scipy-doc/generated/scipy.optimize.curve_fit.html>. Acesso em: 21 jan. 2023.

SILVA, A. DE S. A. DA. O ensino de Física na educação básica usando como motivação a determinação da aceleração gravitacional. 2018.

sklearn.linear_model.LinearRegression. Disponível em: <https://scikit-learn/stable/modules/generated/sklearn.linear_model.LinearRegression.html>. Acesso em: 21 jan. 2023.

Tema 01 - O Oscilador Harmônico Simples | Experimentos - Pêndulos simples. , 31 maio 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Ab9OB9Q6QNw>>. Acesso em: 19 jan. 2023

TRETIKOV, N. P. Pêndulo Invertido: Dinâmica Complexa num Sistema Mecânico Simples. v. 21, n. 1, 1999.